КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ГРИШКО Юлія Валентинівна

УДК 512.543

СИМЕТРИЧНІ ПІДМНОЖИНИ ТА ФАРБУВАННЯ ГРУП

01.01.06 - алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ - 2002

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ПРОТАСОВ Ігор Володимирович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри дослідження операцій

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
БАНАХ Тарас Онуфрійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра алгебри і топології

кандидат фізико-математичних наук, доцент
БОНДАРЧУК Юрій Вікторович,
Національний університет "Києво-Могилянська академія", завідувач кафедри математики

Провідна установа: Інститут математики НАН України, відділ алгебри, м. Київ

Захист відбудеться «____» _________ 2002 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03127, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету імені Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розісланий «____» _________ 2002 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради ____________________ Плахотник В.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В 1943 році в роботі [1] Е. Х'юіт ввів поняття розкладності топологічного простору. Топологічний простір називається *розкладним*, якщо його можна розбити на дві щільні підмножини. Це поняття вивчалось в багатьох роботах. Однак особливо плідним воно виявилось для топологічних груп. В 1994 році в роботі [2] В. Комфорт та Я. ван Мілл довели, що кожна недискретна топологічна абелева група зі скінченним числом елементів порядку 2 розкладна.

В тій же роботі Комфорт та ван Міл ввели поняття абсолютної розкладності і поставили проблему опису абсолютно розкладних груп. Група називається *абсолютно розкладною*, якщо її можна розбити на дві підмножини, щільні в будь-якій недискретній груповій топології. Проблема опису абсолютно розкладних груп виявилась достатньо непростою вже навіть для групи раціональних чисел, а для групи дійсних чисел і взагалі не піддавалася розв'язанню. В абелевому випадку цю проблему остаточно розв'язав Є.Г. Зеленюк в 2000 році в роботі [3], довівши, що кожна нескінченна абелева група зі скінченним числом елементів порядку 2 абсолютно розкладна.

Переформулювавши означення абсолютної рокладності, можна сказати, що нескінченна абелева група G абсолютно розкладна тоді і тільки тоді, коли її можна розбити на дві підмножини, жодна з яких не містить підмножин вигляду $g+U$, де U – окіл нуля G в деякій недискретній груповій топології. В 1996 році в роботі [4] І.В. Протасов розв'язав задачу, схожу з проблемою опису абсолютно розкладних груп. Він описав абелеві групи, які можна розбити на дві підмножини, жодна з яких не містить нескінченних підмножин вигляду $g+U$, де $U=-U$. Такі підмножини Протасов назвав *симетричними*, а групи, які можна розбити на дві підмножини, жодна з яких не містить нескінченних симетричних підмножин, – *асиметрично розкладними*. Якщо точніше, то Протасов дав наступне еквівалентне даному означення симетричної підмножини. Підмножина A абелевої групи G називається симетричною, якщо знайдеться елемент $g \in G$ такий, що $2g-A=A$. Пізніше Р.І. Григорчук поширив це означення на довільні групи, назвавши підмножину A групи G симетричною, якщо $gA^{-1}g=A$ для деякого $g \in G$.

Після результату Протасова розпочалося активне вивчення симетричних підмножин в групах, особливо їх рамсеївських аспектів. Так, наприклад, в [5] Т.О. Банах та І.В. Протасов довели, що для будь-якого r-фарбування скінченної циклічної групи $\boldsymbol{Z}_n$ знайдеться однокольорова симетрична підмножина потужності $\geq \frac{n}{r^2}$. В цьому напрямку було одержано також низку інших цікавих результатів. В той же час, багато природних питань, які виникли з самого початку, наприклад, проблема опису всіх асиметрично розкладних груп, залишаються відкритими. Тому тема дисертаційної роботи є актуальною.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота пов’язана з науковими розробками кафедри дослідження операцій Київського національного університету імені Тараса Шевченка за темою “Розвиток теорії і програмного забезпечення стохастичних та алгебраїчних систем із застосуванням в економіці, соціології, техніці та освіті” (номер державної реєстрації 01БФ015-01).

Мета і задачі дослідження. Отримати числові та кардинальні характеристики груп по відношенню до їх симетрій та фарбувань. Зокрема, знайти формулу підрахунку числа симетричних r-фарбувань скінченної групи G та числа класів еквівалентних симетричних r-фарбувань G. Довести, що при будь-якому r-фарбуванні скінченної абелевої групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина потужності $\geq \frac{|G|}{r^2}$. Побудувати контрприклади до цього твердження в неабелевому випадку. Довести, що при будь-якому 2-фарбуванні нескінченної групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина як завгодно великої потужності $<|G|$.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються загальні теоретико-множинні, алгебраїчні та комбінаторні методи, зокрема, метод обернення Мьобіуса на частково впорядкованих множинах (розділ 3), теоретико-груповий метод визначальних співвідношень (розділ 4), функції росту груп (розділ 5).

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації одержано наступні нові результати.

Виведено загальні формули підрахунку числа симетричних r-фарбувань та числа класів еквівалентних симетричних r-фарбувань для довільної скінченної групи. У випадку скінченної циклічної групи ці формули зведено до цілком завершеного вигляду.

Доведено, що для будь-якого r-фарбування скінченної абелевої групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина потужності $\geq \frac{|G|}{r^2}$.

Доведено, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $r \geq 2$ існує як завгодно велика скінченна група G з r-фарбуванням без однокольорових симетричних підмножин потужності $\geq |G| \cdot \left(\frac{1}{2r^2} + \varepsilon\right)$.

Доведено, що якщо комутант групи G містить нескінченну скінченно породжену підгрупу, відмінну від майже циклічної, то при будь-якому 2-фарбуванні G містить нескінченну однокольорову симетричну підмножину. Цей результат, зокрема, вирішує у випадку двох кольорів проблему Р.І. Григорчука [6, Problem 1.2] та проблему І.В. Протасова [6, Problem 1.7].

Доведено, що для будь-якого 2-фарбування нескінченної групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина як завгодно великої потужності $<|G|$.

Доведено, що якщо для групи G існує 2-фарбуванні без нескінченних однокольорових симетричних підмножин, то G є або зліченною локально скінченною, або майже циклічною.

Всі ці результати одержано вперше.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані у подальших дослідженнях з алгебри та комбінаторики, а також скласти основу для відповідного спецкурсу.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано автором особисто. В єдиній сумісній роботі [3] (із списку робіт автора за темою дисертації) автору належить теорема, а співавтору – наслідок.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації неодноразово доповідались на семінарах кафедри дослідження операцій та на семінарах кафедри алгебри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, на семінарі відділу алгебри Інституту математики НАН України, на Київському алгебраїчному семінарі. Крім того, результати дисертаційної роботи доповідались на наступних міжнародних конференціях:

- третя міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м.Суми, 2001 р.);
- міжнародна конференція "Algebra and Discrete Mathematics" (м.Хаттінген, Німеччина, 2001 р.);
- десята міжнародна конференція "European Women in Mathematics" (Мальта, 2001 р.);
- дев'ята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2002 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 4 роботах у фахових виданнях (одна із них є сумісною з Протасовим І.В.) та в 3 тезах міжнародних конференцій. Список публікацій наведено в кінці автореферату.

Об'єм та структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації – 118 сторінок. Список використаних джерел містить 51 найменування і займає 4 сторінки.

ЗМІСТ РОБОТИ

В першому розділі дано огляд літератури по теорії Рамсея, по розкладності груп та по симетричних підмножинах в групах – темах, безпосередньо пов'язаних з дисертацією. У другому розділі стисло викладено інформацію про основні методи досліджень – обернення Мьобіуса на частково впорядкованих множинах, задання груп з допомогою визначальних співвідношень та функції росту груп.

Перший змістовний розділ дисертації – третій – **“**Симетричні фарбування скінченних груп**”**.

Нехай G – скінченна група, $r \in \boldsymbol{N}$. Позначимо $M_r(G)$ множину всіх r-фарбувань G, тобто відображень $G \to \{0,1,\ldots,r-1\}$. Кожному фарбуванню $\chi \in M_r(G)$ та кожному елементу $g \in G$ співставимо фарбування $\chi \cdot g \in M_r(G)$ за правилом $\chi \cdot g(x) = \chi(xg^{-1})$. Тоді відображення

$$M_r(G) \times G \ni (\chi, g) \mapsto \chi \cdot g \in M_r(G)$$

буде правою дією групи G на множині $M_r(G)$. Еквівалентність на $M_r(G)$, індуковану розбиттям на орбіти, позначимо ~. Таким чином, фарбування $\chi, \varphi \in M_r(G)$ *еквівалентні*, якщо знайдеться елемент $g \in G$ такий, що $\chi(x) = \varphi(xg^{-1})$ для кожного $x \in G$.

Фарбування $\chi \in M_r(G)$ називається *симетричним*, якщо знайдеться елемент $g \in G$, який називається центром симетрії фарбування χ, такий, що $\chi(gx^{-1}g) = \chi(x)$ для кожного $x \in G$. Якщо фарбування симетричне, то і кожне фарбування, еквівалентне йому, теж симетричне. Підмножину в $M_r(G)$ всіх симетричних фарбувань позначимо $S_r(G)$.

Очевидно, число $|M_r(G)|$ всіх r-фарбувань групи G дорівнює $r^{|G|}$. Число $|M_r(G)/\sim|$ класів еквівалентних r-фарбувань теж підраховується легко (за допомогою леми Бернсайда):

$$|M_r(G)/\sim| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r^{|G:\langle g\rangle|}\ .$$

Але вже підрахунок числа $|S_r(G)|$ симетричних r-фарбувань та числа $|S_r(G)/\sim|$ класів еквівалентних симетричних r-фарбувань – значно складніша задача.

Теорема 3.2.7. Для кожної скінченної абелевої групи G

$$\left|S_r(G)/\sim\right| = \sum_{X \le G}\sum_{Y \le X} \frac{\mu(Y,X)}{\left|B(G/Y)\right|} r^{\frac{|G/X|+|B(G/X)|}{2}},$$

$$\left|S_r(G)\right| = \sum_{X \le G}\sum_{Y \le X} \frac{\mu(Y,X)\left|G/Y\right|}{\left|B(G/Y)\right|} r^{\frac{|G/X|+|B(G/X)|}{2}},$$

де $\mu(Y,X)$ – функція Мьобіуса частково впорядкованої множини підгруп G, $B(H) = \{x \in H : 2x = 0\}$.

На жаль, застосовувати на практиці формули з теореми 3.2.7 не так то й просто. Однак у випадку скінченної циклічної групи вони зводяться до цілком завершеного вигляду.

Теорема 3.3.1. Якщо n непарне, то

$$\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim\right| = r^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)\right| = \sum_{d|n} d \prod_{p|\frac{n}{d}} (1-p) r^{\frac{d+1}{2}}.$$

Якщо ж n парне, то

$$\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim\right| = \frac{r^{\frac{n}{2}+1} + r^{\frac{m+1}{2}}}{2},$$

де m – найбільше непарне число, що ділить n,

$$\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)\right| = \sum_{d|\frac{n}{2}} d \prod_{p|\frac{n}{2d}} (1-p) r^{d+1}.$$

Тут добуток поширюється на всі прості числа, що ділять вказане число.

Числа $\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)\right|$ та $\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim\right|$ мають наступний комбінаторно-геометричний зміст:

$\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)\right|$ – це число симетричних r-фарбувань множини вершин правильного n-кутника,

$\left|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim\right|$ – це число класів еквівалентних симетричних r-фарбувань множини вершин правильного n-кутника.

Фарбування симетричне, якщо воно інваріантне відносно деякої дзеркальної симетрії з віссю, що проходить через центр многокутника та одну з його вершин. Фарбування еквівалентні, якщо одне отримується з іншого деяким поворотом відносно центра многокутника.

Число $\left|S_r\left(\boldsymbol{Z}_n\right)/\sim\right|$ можна інтерпретувати також як число намист довжини n із намистинок r кольорів. Добре відомо, що число всіх намист довжини n із намистинок r кольорів дорівнює $\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)r^{\frac{n}{d}}$, де φ – функція Ейлера.

В неабелевому випадку числа $\left|S_r(G)\right|$ та $\left|S_r(G)/\sim\right|$ підраховуються через решітку точних розбиттів G.

Нехай π – довільне розбиття групи G. Підмножина $St(\pi)$ всіх таких $h\in G$, що для кожного $x\in G$ елементи x та xh лежать в одному блоці розбиття π, називається стабілізатором π. Очевидно, $St(\pi)$ – підгрупа G. Підмножина $Z(\pi)$ всіх таких $g\in G$, що для кожного $x\in G$ елементи x та $gx^{-1}g$ лежать в одному блоці розбиття π, називається центром π. Якщо для кожного $x\in G$ елементи x та x^{-1} лежать в одному блоці розбиття π, то π називається симетричним відносно одиниці. Якщо розбиття π симетричне відносно одиниці, то $Z(\pi)$ складається із всіх таких $g\in G$, що для кожного $x\in G$ елементи x та gxg лежать в одному блоці розбиття. При цьому $Z(\pi)$ є об’єднанням деякої множини лівих суміжних класів G по $St(\pi)$ і є об’єднанням деякої множини правих суміжних класів G по $St(\pi)$. Розбиття π групи G називається *точним*, якщо воно є найтоншим серед усіх розбиттів, симетричних відносно одиниці, зі стабілізатором $St(\pi)$ та центром $Z(\pi)$.

Теорема 3.4.11. Нехай P – частково впорядкована множина точних розбиттів G. Тоді

$$\left|S_r(G)/\sim\right|=\sum_{x\in P}\sum_{y\le x}\frac{\mu(y,x)\left|St(y)\right|}{\left|Z(y)\right|}r^{|x|},$$

$$\left|S_r(G)\right|=|G|\sum_{x\in P}\sum_{y\le x}\frac{\mu(y,x)}{\left|Z(y)\right|}r^{|x|}.$$

Четвертий розділ називається “Однокольорові симетричні підмножини при фарбуваннях скінченних груп”.

Нехай, як і раніше, G – скінченна група, $r\in\boldsymbol{N}$. Позначимо $s_r(G)$ найбільше число вигляду $\frac{k}{|G|}$, де $k\in\boldsymbol{N}$, таке, що для кожного r-фарбування G знайдеться однокольорова симетрична підмножина потужності k. Позначимо $\sigma_r(G)$ найбільше число вигляду $\frac{k}{|G|}$, де $k\in\boldsymbol{N}$, таке, що для кожного r-фарбування χ

групи G знайдеться підмножина $X \subseteq G$ потужності k та елемент $g \in G$ такі, що $\chi(x) = \chi(gx^{-1}g)$ для всіх $x \in X$. Очевидно,

$$\sigma_r(G) \le 1, \quad s_r(G) \le \frac{1}{r} + \frac{1}{|G|}, \quad s_r(G) \ge \frac{\sigma_r(G)}{r}.$$

В роботі [5] було доведено, що $\sigma_r(\boldsymbol{Z}_n) \ge \frac{1}{r}$ і, отже, $s_r(\boldsymbol{Z}_n) \ge \frac{1}{r^2}$.

Теорема 4.1.1. Для кожної скінченної абелевої групи G $\sigma_r(G) \ge \frac{1}{r}$ і, отже, $s_r(G) \ge \frac{1}{r^2}$.

Наступні дві теореми описують скінченні абелеві групи, на яких функція σ_r приймає екстремальні значення.

Теорема 4.2.1. Для кожної скінченної абелевої групи G $\sigma_r(G) = \frac{1}{r}$ тоді і тільки тоді, коли r ділить $|2G|$, де $2G = \{2x : x \in G\}$.

Теорема 4.2.2. Для кожної скінченної абелевої групи G $\sigma_r(G) = 1$ тоді і тільки тоді, коли має місце один із наступних випадків:

(1) $r = 1$;
(2) $r = 2$ і G – циклічна група порядку 3 або 5;
(3) G – булева група.

Функція s_r досліджується складніше, хоча вона й більш природна.

Теорема 4.3.1. Для кожної скінченної абелевої групи G $s_2(G) = \frac{1}{4}$ тоді і тільки тоді, коли G містить підгрупу $\boldsymbol{Z}_4$.

За теоремою 4.1.1 $s_r(G) \ge \frac{1}{r^2}$ для кожної скінченної абелевої групи G. І.В. Протасов помітив, що ця нерівність поширюється і на всі скінченні групи непарного порядку, але для групи кватерніонів $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ це не так: $s_2(Q) = \frac{1}{8}$. Чи вірно, що для кожного $\varepsilon > 0$ та $r > 1$ існує скінченна група G з $s_r(G) < \varepsilon$? [6, Question 4.4]. Насправді було навіть невідомо, чи існує скінченна група $G \neq Q$ з $s_r(G) < \frac{1}{r^2}$.

Теорема 4.4.1. (1) Для кожного $k \in \boldsymbol{N}$ існує скінченна група G така, що $|G| > k$ і $s_2(G) = \frac{1}{8}$.

(2) Для кожного $k \in \boldsymbol{N}$, $\varepsilon > 0$ та $r > 2$ існує скінченна група G така, що $|G| > k$ і $\frac{1}{2r^2} < s_r(G) < \frac{1}{2r^2} + \varepsilon$.

Доведення теореми 4.4.1 базується на наступній теоретико-груповій конструкції та лемі.

Нехай A – абелева група з інволюцією i. Покладемо

$$E(A,i) = \left\langle A \cup \{u\} \| xy = x \cdot y, u^2 = i, ux = x^{-1}u \ (x, y \in A) \right\rangle.$$

Тоді $E(A,i)$ – розширення A з допомогою $\boldsymbol{Z}_2$.

Для кожного фарбування ψ скінченної групи G через $s(\psi)$ позначимо найбільшу з потужностей однокольорових симетричних підмножин G, поділену на $|G|$.

Лема 4.4.3. Нехай A – скінченна абелева група з інволюцією i, $G = E(A,i)$, φ – фарбування A таке, що $\varphi(x) \neq \varphi(xi)$ для всіх $x \in A$. Продовжимо φ до фарбування ψ групи G, поклавши $\psi(xu) = \varphi(x)$ для кожного $x \in A$. Тоді $s(\psi) = \frac{1}{2} s(\varphi)$.

П'ятий розділ називається "Однокольорові симетричні підмножини при 2-фарбуваннях нескінченних груп".

Нехай G – нескінченна група, r – кардинал. Позначимо $k_r(G)$ найменший кардинал k такий, що існує r-фарбування G без однокольорових симетричних підмножин потужності k. Таким чином, якщо $k_r(G) = k$, то для будь-якого r-фарбування G знайдеться однокольорова симетрична підмножина як завгодно великої потужності $< k$, однак існує r-фарбування G без однокольорових симетричних підмножин потужності k. Очевидно, $k_r(G) \leq |G|^+$.

В роботі [4] І.В.Протасов описав нескінченні абелеві групи G з $k_2(G) = \omega$. Ними виявились групи вигляду $\boldsymbol{Z} \oplus K$, де K – скінченна абелева група, та зліченні періодичні абелеві групи зі скінченним числом елементів порядку 2. Проблема опису всіх нескінченних груп G з $k_2(G) = \omega$ значно складніша. Так, наприклад, вона була відкритою для вільної групи з двома твірними ([6, Problem 1.2]) та для кожної нескінченної скінченно породженої періодичної групи, а для кожної нескінченної скінченно породженої групи G скінченного періоду було навіть невідомо, чи вірно, що $k_2(G) \geq \omega$ ([6, Problem 1.7]).

Група називається *майже циклічною*, якщо вона містить циклічну підгрупу скінченного індексу. Так, зокрема, кожна скінченна група майже циклічна.

Теорема 5.1.1. Якщо комутант групи G містить нескінченну скінченно породжену підгрупу, відмінну від майже циклічної, то $k_2(G) \geq \omega_1$.

Із теореми 5.1.1 випливає, що $k_2(G) = \omega_1$ і для вільної групи з двома твірними, і для кожної нескінченної скінченно породженої періодичної групи.

Далі, з допомогою теореми 5.1.1 одержано ще два результати. Перший з них пов'язаний з теоремою Протасова із [7] . При будь-якому 3-фарбуванні нескінченної абелевої групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина як-завгодно великої потужності $< |G|$, тобто $k_3(G) \geq |G|$.

Теорема 5.2.3. Для кожної нескінченної групи G $k_2(G) \geq |G|$.

Другий результат стосується вже згадуваної проблеми опису нескінченних груп G з $k_2(G) = \omega$.

Теорема 5.3.1. Нехай G – нескінченна група з $k_2(G) = \omega$. Припустимо, що має місце один із наступних випадків:

(1) G' скінченна;

(2) G' нескінченна і G/G' періодична.

Тоді G або майже циклічна, або зліченна локально скінченна.

Недавно А. Хеліф доповнив теорему 5.3.1 наступним результатом.

Теорема Хеліфа. Нехай G – група з нескінченною G' та неперіодичною G/G'. Тоді $k_2(G) \geq \omega_1$.

Із теореми 5.3.1 та теореми Хеліфа випливає

Теорема 5.4.2. Кожна нескінченна група G з $k_2(G) = \omega$ є або зліченною локально скінченною, або майже циклічною.

Чи вірно, що й навпаки, як і в абелевому випадку, $k_2(G) = \omega$ для кожної зліченної групи G, яка є локально скінченною або майже циклічною і, звичайно, має лише скінченне число елементів порядку 2? Виявляється, ні.

Теорема 5.5.1. Нехай A – нескінченна абелева група з елементом a порядку 4. Покладемо $i = a^2$, $G = E(A,i)$. Тоді $k_2(G) = |G|^+$.

Наслідок 5.5.2. Для кожного нескінченного кардинала m існує локально скінченна група G потужності m з єдиним елементом порядку 2 така, що $k_2(G) = m^+$.

Наслідок 5.5.3. Існує нескінченна майже циклічна група G з єдиним елементом порядку 2 така, що $k_2(G) = \omega_1$.

ВИСНОВКИ

В дисертації отримано числові та кардинальні характеристики груп по відношенню до їх симетрій та фарбувань. Зокрема, одержано наступні нові результати.

- Виведено формули підрахунку числа $|S_r(G)|$ симетричних r-фарбувань скінченної абелевої групи G та числа $|S_r(G)/\sim|$ класів еквівалентних симетричних r-фарбувань:

$$|S_r(G)/\sim| = \sum_{X \le G} \sum_{Y \le X} \frac{\mu(Y,X)}{|B(G/Y)|} r^{\frac{|G/X| + |B(G/X)|}{2}},$$

$$|S_r(G)| = \sum_{X \le G} \sum_{Y \le X} \frac{\mu(Y,X)|G/Y|}{|B(G/Y)|} r^{\frac{|G/X| + |B(G/X)|}{2}},$$

де $\mu(Y,X)$ – функція Мьобіуса частково впорядкованої множини підгруп G.

- З допомогою цих формул підраховано числа $|S_r(\boldsymbol{Z}_n)|$ та $|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim|$. Якщо n непарне, то

$$|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim| = r^{\frac{n+1}{2}},$$

$$|S_r(\boldsymbol{Z}_n)| = \sum_{d|n} d \prod_{p \mid \frac{n}{d}} (1-p) r^{\frac{d+1}{2}}.$$

Якщо ж $n = 2^l m$, де $l \ge 1$ і m непарне, то

$$|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim| = \frac{r^{\frac{n}{2}+1} + r^{\frac{m+1}{2}}}{2},$$

$$\left|S_r\left(\boldsymbol{Z}_n\right)\right| = \sum_{d\left|\frac{n}{2}\right.} d \prod_{p\left|\frac{n}{2d}\right.} (1-p) r^{d+1} .$$

Тут добуток поширюється на всі прості числа, що ділять вказане число.

- Запропоновано загальні формули підрахунку чисел $\left|S_r(G)\right|$ та $\left|S_r(G)/\sim\right|$ для довільної скінченної групи G через решітку P так званих точних розбиттів:

$$\left|S_r(G)/\sim\right| = \sum_{x\in P}\sum_{y\le x} \frac{\mu(y,x)\left|St(y)\right|}{\left|Z(y)\right|} r^{|x|} ,$$

$$\left|S_r(G)\right| = |G| \sum_{x\in P}\sum_{y\le x} \frac{\mu(y,x)}{\left|Z(y)\right|} r^{|x|} .$$

- Доведено, що для будь-якого r-фарбування скінченної абелевої групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина потужності $\ge \dfrac{|G|}{r^2}$.
- Доведено, що для скінченної абелевої групи G існує 2-фарбування без однокольорових симетричних підмножин потужності $> \dfrac{|G|}{4}$ тоді і тільки тоді, коли G має елемент порядку 4.
- Доведено, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $r \ge 2$ існує як завгодно велика скінченна група G з r-фарбуванням без однокольорових симетричних підмножин потужності $\ge |G| \cdot \left(\dfrac{1}{2r^2} + \varepsilon\right)$.
- Доведено, що якщо комутант групи G містить нескінченну скінченно породжену підгрупу, відмінну від майже циклічної, то при будь-якому 2-фарбуванні G містить нескінченну однокольорову симетричну підмножину. Зокрема, нескінченну однокольорову симетричну підмножину при будь-якому 2-фарбуванні містить вільна група з двома твірними, а також кожна нескінченна скінченно породжена періодична група (розв'язки проблем Р.І. Григорчука [6, Problem 1.2] та І.В. Протасова [6, Problem 1.7] у випадку двох кольорів).
- Доведено, що будь-якого 2-фарбування нескінченної групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина як завгодно великої потужності $< |G|$.
- Доведено, що якщо для групи G існує 2-фарбування без нескінченних однокольорових симетричних підмножин, то G є або зліченною локально скінченною, або майже циклічною.
- Побудовано зліченну локально скінченну групу з єдиним елементом порядку 2 та майже циклічну групу з єдиним елементом порядку 2, які при будь-якому 2-фарбуванні містять нескінченну однокольорову симетричну підмножину.

Всі ці результати автором одержано самостійно і вперше.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hewitt E. A problem of set-theoretic topology // Duke Math. J. - 1943. - V.10. - P. 309-333.
2. Comfort W., van Mill J. Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. - 1994. - V.120. - P. 687-696.
3. Зеленюк Е.Г. Разбиения групп на абсолютно плотные подмножества // Матем. заметки. - 2000. - Т.67. - №5. - С. 706-711.
4. Протасов И.В. Асимметрично разложимые абелевы группы // Матем. заметки. - 1996. - Т.59. - №.3. - С. 468-471.
5. Банах Т.О., Протасов І.В. Про симетричність розфарбувань правильних многокутників // У світі математики. - 1997. - Т.3. - №3. - С. 9-15.
6. Banakh T.O., Protasov I.V. Symmetry and colorings: some results and open problems // Изв. Гомельского университета. Вопросы алгебры. - 2001. - Выпуск 17. - №3(6). - С. 4-15.
7. Protasov I.V. Monochromatic symmetric subsets in the colorings of Abelian groups // Доп. НАН України. - 1999. - №11. - С. 54-57.

СПИСОК РОБІТ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гришко Ю.В. Симетричні підмножини та фарбування скінченних абелевих груп // Вісник КУ. Сер. фіз.-мат. н. - 1999. - №3. - С. 200-202.
2. Gryshko Y.V. Symmetric subsets in the colorings of finite Abelian groups // Друга міжнародна алгебраїчна конференція в Україні. Вінниця. - 1999. - С. 18.
3. Gryshko Y.V., Protasov I.V. Symmetric colorings of finite Abelian groups // Доп. НАН України. - 2000. - №1. - С. 32-33.
4. Gryshko Y.V. On monochrome symmetric subsets at 2-colorings of groups // Третя міжнародна алгебраїчна конференція в Україні. Суми. - 2001. - С. 41-42.
5. Гришко Ю.В. Про однокольорові симетричні підмножини при 2-фарбуваннях груп // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2001. - Т.44. - №3. - С. 17-19.
6. Гришко Ю.В. Про симетричні фарбування скінченних циклічних груп // Вісник КУ. Сер. фіз.-мат. н. - 2002. - №2. - С. 22-26.
7. Gryshko Y.V. On symmetric subsets and colorings of finite groups // Дев'ята міжнародна наукова конфереція ім. акад. М. Кравчука. Київ. - 2002. - С. 258.

АНОТАЦІЇ

Гришко Ю.В. Симетричні підмножини та фарбування груп. Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2002.

В дисертації отримано числові та кардинальні характеристики груп по відношенню до їх симетрій та фарбувань. Зокрема, виведено формули підрахунку числа симетричних r-фарбувань скінченної групи G та числа класів еквівалентних симетричних r-фарбувань G. Доведено, що при будь-якому r-фарбуванні скінченної абелевої групи G знайдеться однокольорова симетрична підмножина потужності $\geq \frac{|G|}{r^2}$. В неабелевому випадку побудовано контрприклади до цього твердження. Доведено, що якщо група G при будь-якому 2-фарбуванні містить нескінченну однокольорову симетричну підмножину, то G є або зліченною локально скінченною, або майже циклічною.

Ключові слова: симетрична підмножина, фарбування, однокольорова симетрична підмножина, симетричне фарбування, теорія Рамсея, асиметрично розкладна група, комутант, майже циклічна група, локально скінченна група.

Гришко Ю.В. Симметричные подмножества и раскраски групп. Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2002.

В диссертации получены числовые и кардинальные характеристики групп по отношению к их симметриям и раскраскам. В частности, выведены формулы для подсчёта числа симметричных r-раскрасок конечной группы G и числа классов эквивалентных симметричных r-раскрасок G. Доказано, что при любой r-раскраске конечной абелевой группы G найдётся одноцветное симметричное подмножество мощности $\geq \frac{|G|}{r^2}$. В неабелевом случае построены контрпримеры к этому утверждению. Доказано, что если группа G при любой 2-раскраске содержит бесконечное одноцветное симметричное подмножество, то G либо счётная локально конечная, либо почти циклическая.

Ключевые слова: симметричное подмножество, раскраска, одноцветное симметричное подмножество, симметричная раскраска, теория Рамсея, асимметрично разложимая группа, коммутант, почти циклическая группа, локально конечная группа.

Gryshko Y.V. Symmetric subsets and colorings of groups. Manuscript.

Dissertation for pursuing Ph.D degree in the fields of Physics and Mathematics, specialization 01.01.06 – algebra and number theory. Kyiv Taras Shevchenko University, Kyiv, 2002.

In the dissertation there is obtained numeric and cardinal characteristics of groups with respect to their symmetries and colorings. In particular, it is deduced formulae for calculating numbers $|S_r(G)|$ of symmetric r-colorings and $|S_r(G)/\sim|$ of classes of equivalent symmetric r-colorings for arbitrary finite Abelian group G by using Möbious function for the lattice of its subgroups. In case of finite cyclic group these formulae are reduced to a quite simple form. This case has a special interest since $|S_r(\boldsymbol{Z}_n)|$ and $|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim|$ can be interpreted in the following geometric sense: $|S_r(\boldsymbol{Z}_n)|$ is a number of symmetric r-colorings of vertices of regular n-gon and $|S_r(\boldsymbol{Z}_n)/\sim|$ is a number of classes of equivalent symmetric r-colorings. A coloring is symmetric if it is invariant in respect to some mirror symmetry with an axis that crossing center of polygon and one of its vertices. Colorings are equivalent if we can get one from another by rotating about the polygon center. There is also proposed formulae for calculating numbers $|S_r(G)|$ and $|S_r(G)/\sim|$ for every non-commutative finite group G by using so-called lattice of precise partitions.

It is proved that for every r-coloring of finite Abelian group G there is a monochrome symmetric subset of cardinality $\geq \frac{|G|}{r^2}$. For finite Abelian group G there is proved to be a 2-coloring without of monochrome symmetric subsets of cardinality $> \frac{1}{4}$ if and only if G has no elements of order 4. It is shown that for any $\varepsilon > 0$ and $r \geq 2$ there is an arbitrarily big finite group G that can be r-colored without of monochrome symmetric subsets of cardinality $\geq |G| \cdot \left(\frac{1}{2r^2} + \varepsilon \right)$.

It is proved that if commutant of a group G contains infinite finitely generated subgroup different from almost cyclic then at any 2-coloring G contains infinite monochrome symmetric subsets. In particular, at any 2-coloring both free group on two generators (answer to R.I.Grigorchuk's problem) and every infinite finitely generated periodic group (answer to I.V.Protasov's problem) contain infinite monochrome symmetric subsets. For every 2-coloring of infinite group G there is proved to be monochrome symmetric subsets of arbitrarily big cardinality $< |G|$. It is proved that if a group G admits a 2-coloring without of infinite monochrome symmetric subsets then G is either almost cyclic or countable locally finite. There is constructed almost cyclic group with the only element of order 2 and countable locally finite group with the only element of order 2 which at any 2-coloring contain infinite monochrome symmetric subsets.

Key words: symmetric subset, coloring, monochrome symmetric subset, symmetric coloring, Ramsey theory, assymetrically resolvable group, commutant, almost cyclic group, locally finite group.